|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **Домашнє завдання № 9**  **з дисципліни “Математичне моделювання систем та процесів”**  **студента групи КВ-64М**  **Подольського Сергія Валентиновича**      2011**.**  12 **.**  06  **(*рік*) (*місяць*) (*число*)** |

**Варіант № 1**

Нехай задані початкові дані

1. Знайти рівняння руху кожного з вагонів при та побудувати їх графіки.
2. Знайти момент часу, коли вагони роз'єднуються, і відповісти на питання, що буде, коли вагони роз’єднаються.

Маємо систему

яка еквівалентна матричному рівнянню

де

Знайдемо власні числа матриці. При цьому врахуємо той факт, що в нашому випадку і внаслідок цього :

Знайдемо детермінант, рухаючись по першому рядку матриці:

Звідси матриця має власні значення

що відповідають власним частотам

фізичної системи, що розглядається.

**Випадок 1**: . Рівняння власного вектора

прийме вигляд

Звідси

– власний вектор, що відповідає . Відповідна частина загального розв’язку рівняння має вигляд

**Випадок 2**: . Рівняння власного вектора

прийме вигляд

Звідси

– власний вектор, що відповідає . Відповідна частина загального розв’язку рівняння має вигляд

**Випадок 3**: .

Рівняння власного вектора

прийме вигляд

Звідси

– власний вектор, що відповідає   
. Відповідна частина загального розв’язку рівняння має вигляд

**Загальний розв’язок** рівняння має вигляд

Щоб знайти частковий розв’язок, припустимо, що крайній лівий вагон рухається вправо зі швидкістю і в момент часу вдаряє по іншим двом вагонам, які разом складають єдину механічну систему, що знаходиться при цьому в спокої. Відповідні початкові умови мають вигляд

Підставивши в отриману формулу для отримаємо

Отже, вектор , компонентами якого є функції, що виражають положення цих трьох вагонів, має вигляд

а вектор , компонентами якого є функції, що виражають швидкості, має вигляд

Підставивши в отриману формулу для отримаємо

Функції, що виражають положення цих трьох вагонів, мають вигляд

Проте дані рівняння справедливі лише тоді, коли обидві пружини зжаті, тобто тільки тоді, коли виконуються обидві нерівності (див. рис. 1)

Умова виконується до моменту часу .

Умова виконується до моменту часу .

Ці три залізничні вагони залишається з'єднаними і переміщуються вправо, поки не відбувається роз’єднання першого та другого вагонів в момент часу . Після цього перший вагон відкочується назад з невеликою постійною швидкістю, а другий з третім залишаються з’єднаними і продовжують рухатися. В момент часу другий і третій вагони роз’єднуються, після чого другий вагон продовжує котитись із дуже малою швидкістю вперед, а третій продовжує рухатись вперед із сталою швидкістю, близькою до .

Дані твердження можна спостерігати на графіку зміщення кожного вагону (рис. 1), а також на графіку швидкостей кожного вагону (рис. 2). Дані графіки побудовані у масштабі, коли початкова швидкість дорівнює одному метру на секунду. На графіку зміщень вагонів їх роз’єднання виникають в абсцисах точок перетину ліній зміщення першого і другого та другого і третього вагонів відповідно. На графіку швидкостей ці два переломні моменти часу показано двома вертикальними лініями.

Після роз’єднання вагонів на графіках їх швидкості продовжують змінюватись. Це зумовлено тим, що знайдені функції мають періодичні складові і побудовані для математичної моделі, в якій не врахована можливість пружин роз’єднуватись. Таким чином, ми припускаємо, що на графіках швидкостей після роз’єднання вагонів їх відповідні швидкості залишаються постійними і вагони рухаються далі за інерцією без опору.

Роз’єднання всіх вагонів відбувається не одночасно в один і той же момент, а в два різні моменти часу. В цьому випадку при перевірці результатів в математичному пакеті Matlab виникає невідповідність до 1% в законі збереження кінетичної енергії всіх вагонів. Це зумовлено тим, що побудована математична модель не зовсім відповідає ситуації, яка моделюється. Адже після першого роз’єднання вагонів функції зміщення вагонів описуються тією ж самою математичною моделлю, проте складова жорсткості однієї від’єднаної пружини на ці функції припиняє впливати.

Функції, отримані за допомогою розрахунків вручну, є еквівалентними до функцій, отриманих за допомогою пакету Matlab, що очевидно, якщо спростити отримані за допомогою пакету Matlab вирази для функцій, підставивши їх в рядок пошуку порталу Wolfram Alpha.

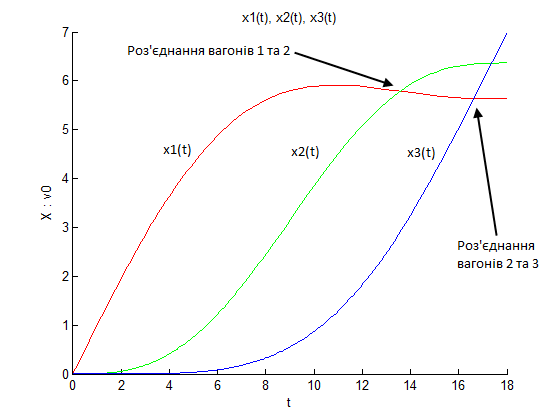


Рис.  1. Графік зміщення вагонів у часі

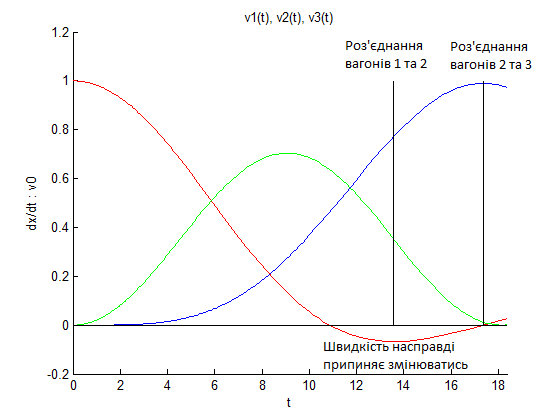


Рис.  2. Графік зміни швидкостей вагонів у часі

Лістинг  1. Скрипт для перевірки результатів та побудови графіків

|  |
| --- |
| clc  clear  close all    eq1 = '70 \* D2x1 = -2.5 \* x1 + 2.5 \* x2';  eq2 = '59 \* D2x2 = 2.5 \* x1 - 5 \* x2 + 2.5 \* x3';  eq3 = '70 \* D2x3 = 2.5 \* x2 - 2.5 \* x3';    cond1 = 'x1(0) = 0';  cond2 = 'x2(0) = 0';  cond3 = 'x3(0) = 0';    cond4 = 'Dx1(0) = 1';  cond5 = 'Dx2(0) = 0';  cond6 = 'Dx3(0) = 0';    [x1, x2, x3] = dsolve(eq1, eq2, eq3, cond1, cond2, cond3, cond4, cond5, cond6);    % Disconnection time moments  t1 = fsolve(inline(x2 - x1), 13);  t2 = fsolve(inline(x3 - x2), 13);    % Velocities functions  Dx1 = inline(diff(x1));  Dx2 = inline(diff(x2));  Dx3 = inline(diff(x3));    % Instantaneous velocities after disconnections  v1 = Dx1(t1)  v2 = Dx2(t2)  v3 = Dx3(t2)    % Total kinetic energy before collision assuming v0 = 1 m/s  E1 = 70 \* 1^2 / 2;  % Total kinetic energy after collision  E2 = 70 \* v1^2 / 2 + 59 \* v2^2 / 2 + 70 \* v3^2 / 2;  % Difference in kinetic energies. Must be equal to zero  DeltaE = E1 - E2    % Plot X  limits = [0 18];  figure, hold on  title('x1(t), x2(t), x3(t)')  xlabel('t')  ylabel('X : v0')  fplot(inline(x1), limits, 'r')  fplot(inline(x2), limits, 'g')  fplot(inline(x3), limits, 'b')  hold off    % Plot velocities  limits = [0 t2 + 1];  figure, hold on  title('v1(t), v2(t), v3(t)')  xlabel('t')  ylabel('dx/dt : v0')  fplot(Dx1, limits, 'r')  fplot(Dx2, limits, 'g')  fplot(Dx3, limits, 'b')  fplot(@(t) 0, limits, 'k')  line([t1 t1], [0 1], 'Color', 'k')  line([t2 t2], [0 1], 'Color', 'k')  hold off |

Лістинг  2. Результати запуску скрипта

|  |
| --- |
| x1 =  (70\*t)/199 + 7^(1/2)\*sin((7^(1/2)\*t)/14) + (59\*82187^(1/2)\*sin((82187^(1/2)\*t)/826))/39601    x2 =  (70\*t)/199 - (140\*82187^(1/2)\*sin((82187^(1/2)\*t)/826))/39601    x3 =  (70\*t)/199 - 7^(1/2)\*sin((7^(1/2)\*t)/14) + (59\*82187^(1/2)\*sin((82187^(1/2)\*t)/826))/39601    Equation solved.  fsolve completed because the vector of function values is near zero  as measured by the default value of the function tolerance, and  the problem appears regular as measured by the gradient.  <stopping criteria details>  t1 =  13.576923755206385  Equation solved.  fsolve completed because the vector of function values is near zero  as measured by the default value of the function tolerance, and  the problem appears regular as measured by the gradient.  <stopping criteria details>  t2 =  17.360626334227458  v1 =  -0.067650317866536  v2 =  0.011621906224766  v3 =  0.990261874898623  DeltaE =  0.514185349741929 |